Juegos de elección múltiple

Francisco Sánchez Sánchez

Facultad de Economía
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Mayo 13, 2010

Motivación

- Juegos de votación
- Distribución de costos compartidos
- Construcción
- Empresa

Motivación

- Juegos de votación
- Distribución de costos compartidos
- Construcción
- Empresa

Motivación

- Juegos de votación
- Distribución de costos compartidos
- Construcción
- Empresa

Motivación

- Juegos de votación
- Distribución de costos compartidos
- Construcción
- Empresa

Notación y definiciones

Sean

- $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de jugadores.
- $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i.
- $M_i = \{0, \ldots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i.
- $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ coaliciones.
- $m = (m_1, \ldots, m_n)$ gran coalición.
- $M_i^+ = M_i \backslash \{0\}$.
- $M^+ = M \backslash \{0\}$.
- función característica $v : M \to \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de jugadores.
- $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i.
- $M_i = \{0, \ldots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i.
- $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ coaliciones.
- $m = (m_1, \ldots, m_n)$ gran coalición.
- $M_i^+ = M_i \backslash \{0\}$.
- $M^+ = M \backslash \{0\}$.
- función característica $v : M \to \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de jugadores.
- $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i.
- $M_i = \{0, \ldots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i.
- $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ coaliciones.
- $m = (m_1, \ldots, m_n)$ gran coalición.
- $M_i^+ = M_i \backslash \{0\}$.
- $M^+ = M \backslash \{0\}$.
- función característica $v : M \to \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de jugadores.
- $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i.
- $M_i = \{0, \ldots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i.
- $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ coaliciones.
- $m = (m_1, \ldots, m_n)$ gran coalición.
- $M_i^+ = M_i \backslash \{0\}$.
- $M^+ = M \backslash \{0\}$.
- función característica $v : M \to \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de jugadores.
- $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i.
- $M_i = \{0, \ldots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i.
- $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ coaliciones.
- $m = (m_1, \ldots, m_n)$ gran coalición.
- $M_i^+ = M_i \backslash \{0\}$.
- $M^+ = M \backslash \{0\}$.
- función característica $v : M \to \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de jugadores.
- $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i.
- $M_i = \{0, \ldots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i.
- $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ coaliciones.
- $m = (m_1, \ldots, m_n)$ gran coalición.
- $M_i^+ = M_i \backslash \{0\}$.
- $M^+ = M \backslash \{0\}$.
- función característica $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de jugadores.
- $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i.
- $M_i = \{0, \ldots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i.
- $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ coaliciones.
- $m = (m_1, \ldots, m_n)$ gran coalición.
- $M_i^+ = M_i \backslash \{0\}$.
- $M^+ = M \backslash \{0\}$.
- función característica $v : M \to \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de jugadores.
- $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i.
- $M_i = \{0, \ldots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i.
- $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ coaliciones.
- $m = (m_1, \ldots, m_n)$ gran coalición.
- $M_i^+ = M_i \backslash \{0\}$.
- $M^+ = M \backslash \{0\}$.
- función característica $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Definición

Un juego de elecciones múltiples es una terna (N, m, v) donde N es un conjunto de jugadores, $m \in \mathbb{N}^N$ y $v : M \to \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- MC^N conjunto de juegos de elección múltiple.
- $P = \{(i,j) | i \in N, j \in M_i^+\}$.
- $x : P \rightarrow \mathbb{R}$ "vector de pagos", donde x_{ij} denota el incremento del pago del jugador i al cambiar su nivel de actividad de $j-1$ a j. $\mathbb{R}^P$ conjunto de vectores de pago.
- $x(s) = \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{s_i} x_{ij}$

Notación y definiciones

Sean

- MC^N conjunto de juegos de elección múltiple.
- $P = \{(i,j) | i \in N, j \in M_i^+\}$.
- $x : P \to \mathbb{R}$ "vector de pagos", donde x_{ij} denota el incremento del pago del jugador i al cambiar su nivel de actividad de $j-1$ a j. $\mathbb{R}^P$ conjunto de vectores de pago.
- $x(s) = \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{s_i} x_{ij}$

Notación y definiciones

Sean

- MC^N conjunto de juegos de elección múltiple.
- $P = \{(i,j) | i \in N, j \in M_i^+\}$.
- $x : P \longrightarrow \mathbb{R}$ "vector de pagos", donde x_{ij} denota el incremento del pago del jugador i al cambiar su nivel de actividad de $j-1$ a j. $\mathbb{R}^P$ conjunto de vectores de pago.
- $x(s) = \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{s_i} x_{ij}$

Notación y definiciones

Sean

- MC^N conjunto de juegos de elección múltiple.
- $P = \{(i,j) | i \in N, j \in M_i^+\}$.
- $x : P \longrightarrow \mathbb{R}$ "vector de pagos", donde x_{ij} denota el incremento del pago del jugador i al cambiar su nivel de actividad de $j-1$ a j. $\mathbb{R}^P$ conjunto de vectores de pago.
- $x(s) = \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{s_i} x_{ij}$

Notación y definiciones

- **Definición**
  Un juego $v \in MC^N$ se llama simple si y sólo si $v(s) \in \{0, 1\}$ para todo $s \in M^+$ y $v(m) = 1$.

- **Definición**
  Un juego $v \in MC^N$ se dice cero-normalizado si ningun jugador puede ganar algo jugando solo, es decir, $v(je^i) = 0$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i$.

Notación y definiciones

- Definición
  Un juego $v \in MC^N$ se llama simple si y sólo si $v(s) \in \{0, 1\}$ para todo $s \in M^+$ y $v(m) = 1$.

- Definición
  Un juego $v \in MC^N$ se dice cero-normalizado si ningun jugador puede ganar algo jugando solo, es decir, $v(je^i) = 0$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i$.

Notación y definiciones

- Definición
  Un juego $v \in MC^N$ se llama simple si y sólo si $v(s) \in \{0, 1\}$ para todo $s \in M^+$ y $v(m) = 1$.

  - Definición
    Un juego $v \in MC^N$ se dice cero-normalizado si ningun jugador puede ganar algo jugando solo, es decir, $v(je^i) = 0$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i$.

Notación y definiciones

- Definición
  Un juego $v \in MC^N$ se llama simple si y sólo si $v(s) \in \{0, 1\}$ para todo $s \in M^+$ y $v(m) = 1$.

- Definición
  Un juego $v \in MC^N$ se dice cero-normalizado si ningun jugador puede ganar algo jugando solo, es decir, $v(je^i) = 0$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i$.

Notación y definiciones

- **Definición**
  Un juego $v \in MC^N$ es aditivo si y sólo si $v(s) = \sum_{i \in N} v(s_i e^i)$ para toda $s \in M$.

- **Definición**
  Dado un juego $v \in MC^N$, su cero-normalización es el juego $v_0 = v - a$, donde a es el juego aditivo tal que $a(je^i) = v(je^i)$.

Notación y definiciones

- Definición
  Un juego $v \in MC^N$ es aditivo si y sólo si $v(s) = \sum_{i \in N} v(s_i e^i)$ para toda $s \in M$.

- Definición
  Dado un juego $v \in MC^N$, su cero-normalización es el juego $v_0 = v - a$, donde a es el juego aditivo tal que $a(je^i) = v(je^i)$.

Notación y definiciones

- Definición
  Un juego $v \in MC^N$ es aditivo si y sólo si $v(s) = \sum_{i \in N} v(s_i e^i)$ para toda $s \in M$.

  - Definición
    Dado un juego $v \in MC^N$, su cero-normalización es el juego $v_0 = v - a$, donde a es el juego aditivo tal que $a(je^i) = v(je^i)$.

Notación y definiciones

- Definición
  Un juego $v \in MC^N$ es aditivo si y sólo si $v(s) = \sum_{i \in N} v(s_i e^i)$ para toda $s \in M$.

- Definición
  Dado un juego $v \in MC^N$, su cero-normalización es el juego $v_0 = v - a$, donde a es el juego aditivo tal que $a(je^i) = v(je^i)$.

Imputaciones

- **Definición**
  Un vector de pago $x \in \mathbb{R}^P$, se dice
  (a) eficiente si y sólo si $x(m) = v(m)$.
  (b) racional en incrementos de nivel si y sólo si $x_{ij} \geq v(je^i) - v((j-1)e^i)$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$

- **Definición**
  El conjunto de imputaciones $I(v)$ de un juego v se define como el conjunto de vectores de pago eficientes y racionales en incrementos de nivel.

Imputaciones

- Definición
  Un vector de pago $x \in \mathbb{R}^P$, se dice

  (a) eficiente si y sólo si $x(m) = v(m)$.
  (b) racional en incrementos de nivel si y sólo si $x_{ij} \geq v(je^i) - v((j-1)e^i)$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$

-

Definición
El conjunto de imputaciones $I(v)$ de un juego v se define como el conjunto de vectores de pago eficientes y racionales en incrementos de nivel.

Imputaciones

- Definición
  Un vector de pago $x \in \mathbb{R}^P$, se dice

  (a) eficiente si y sólo si $x(m) = v(m)$.
  (b) racional en incrementos de nivel si y sólo si $x_{ij} \geq v(je^i) - v((j-1)e^i)$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$

- Definición
  El conjunto de imputaciones $I(v)$ de un juego v se define como el conjunto de vectores de pago eficientes y racionales en incrementos de nivel.

Imputaciones

- Definición
  Un vector de pago $x \in \mathbb{R}^P$, se dice

  (a) eficiente si y sólo si $x(m) = v(m)$.
  (b) racional en incrementos de nivel si y sólo si $x_{ij} \geq v(je^i) - v((j-1)e^i)$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$

- Definición
  El conjunto de imputaciones $I(v)$ de un juego v se define como el conjunto de vectores de pago eficientes y racionales en incrementos de nivel.

Imputaciones

- Definición
  Un vector de pago $x \in \mathbb{R}^P$, se dice

  (a) eficiente si y sólo si $x(m) = v(m)$.
  (b) racional en incrementos de nivel si y sólo si $x_{ij} \geq v(je^i) - v((j-1)e^i)$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$

- Definición
  El conjunto de imputaciones $I(v)$ de un juego v se define como el conjunto de vectores de pago eficientes y racionales en incrementos de nivel.

Imputaciones

- Definición
  Un vector de pago $x \in \mathbb{R}^P$, se dice
  (a) eficiente si y sólo si $x(m) = v(m)$.
  (b) racional en incrementos de nivel si y sólo si $x_{ij} \geq v(je^i) - v((j-1)e^i)$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$

- Definición
  El conjunto de imputaciones $I(v)$ de un juego v se define como el conjunto de vectores de pago eficientes y racionales en incrementos de nivel.

Núcleo

- **Definición**
  El núcleo $C(v)$ de un juego v se define como el conjunto de imputaciones tales que $x(s) \geq v(s)$, es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) | x(s) \geq v(s) \text{ para toda } s \in M\}$$

- **Definición**
  Sean $x, y \in I(v)$ y $s \in M$. Se dirá que y domina x via s si y sólo si $y(s) \leq v(s)$ y $y_i > x_i$ para toda $i \in car(s)$.

- **Definición**
  El d-núcleo $DC(v)$ de un juego v consiste de todas las imputaciones no dominadas.

Núcleo

- Definición
  El núcleo $C(v)$ de un juego v se define como el conjunto de imputaciones tales que $x(s) \geq v(s)$, es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) | x(s) \geq v(s) \text{ para toda } s \in M\}$$

- Definición
  Sean $x, y \in I(v)$ y $s \in M$. Se dirá que y domina x via s si y sólo si $y(s) \leq v(s)$ y $y_i > x_i$ para toda $i \in car(s)$.

- Definición
  El d-núcleo $DC(v)$ de un juego v consiste de todas las imputaciones no dominadas.

Núcleo

- Definición
  El núcleo $C(v)$ de un juego v se define como el conjunto de imputaciones tales que $x(s) \geq v(s)$, es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) | x(s) \geq v(s) \text{ para toda } s \in M\}$$

-

Definición
Sean $x, y \in I(v)$ y $s \in M$. Se dirá que y domina x via s si y sólo si $y(s) \leq v(s)$ y $y_i > x_i$ para toda $i \in car(s)$.

-

Definición
El d-núcleo $DC(v)$ de un juego v consiste de todas las imputaciones no dominadas.

Núcleo

- Definición
  El núcleo $C(v)$ de un juego v se define como el conjunto de imputaciones tales que $x(s) \geq v(s)$, es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) | x(s) \geq v(s) \text{ para toda } s \in M\}$$

- Definición
  Sean $x, y \in I(v)$ y $s \in M$. Se dirá que y domina x via s si y sólo si $y(s) \leq v(s)$ y $y_i > x_i$ para toda $i \in car(s)$.

  - Definición
    El d-núcleo $DC(v)$ de un juego v consiste de todas las imputaciones no dominadas.

Núcleo

- Definición
  El núcleo $C(v)$ de un juego v se define como el conjunto de imputaciones tales que $x(s) \geq v(s)$, es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) | x(s) \geq v(s) \text{ para toda } s \in M\}$$

- Definición
  Sean $x, y \in I(v)$ y $s \in M$. Se dirá que y domina x via s si y sólo si $y(s) \leq v(s)$ y $y_i > x_i$ para toda $i \in car(s)$.

  -

  Definición
  El d-núcleo $DC(v)$ de un juego v consiste de todas las imputaciones no dominadas.

Núcleo

- Definición
  El núcleo $C(v)$ de un juego v se define como el conjunto de imputaciones tales que $x(s) \geq v(s)$, es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) | x(s) \geq v(s) \text{ para toda } s \in M\}$$

- Definición
  Sean $x, y \in I(v)$ y $s \in M$. Se dirá que y domina x via s si y sólo si $y(s) \leq v(s)$ y $y_i > x_i$ para toda $i \in car(s)$.

- Definición
  El d-núcleo $DC(v)$ de un juego v consiste de todas las imputaciones no dominadas.

Núcleo

- **Teorema**
  Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v) \subseteq DC(v)$.

- **Teorema**
  Para todo $v \in MC^N$ con $C(v) \neq \emptyset$ se tiene que $C(v) = DC(v)$.

- **Teorema**
  Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v)$ y $DC(v)$ son convexos.

Núcleo

- Teorema
  Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v) \subseteq DC(v)$.

- Teorema
  Para todo $v \in MC^N$ con $C(v) \neq \varnothing$ se tiene que $C(v) = DC(v)$.

- Teorema
  Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v)$ y $DC(v)$ son convexos.

Núcleo

- Teorema
  Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v) \subseteq DC(v)$.

  - Teorema
    Para todo $v \in MC^N$ con $C(v) \neq \varnothing$ se tiene que $C(v) = DC(v)$.

  - Teorema
    Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v)$ y $DC(v)$ son convexos.

Núcleo

- Teorema
  Para todo $v \in MC^N$ *se tiene que* $C(v) \subseteq DC(v)$.

- Teorema
  Para todo $v \in MC^N$ *con* $C(v) \neq \varnothing$ *se tiene que* $C(v) = DC(v)$.

- Teorema
  Para todo $v \in MC^N$ *se tiene que* $C(v)$ *y* $DC(v)$ *son convexos.*

Núcleo

- Teorema
  Para todo $v \in MC^N$ *se tiene que* $C(v) \subseteq DC(v)$.

- Teorema
  Para todo $v \in MC^N$ *con* $C(v) \neq \emptyset$ *se tiene que* $C(v) = DC(v)$.

- Teorema
  Para todo $v \in MC^N$ *se tiene que* $C(v)$ *y* $DC(v)$ *son convexos.*

Núcleo

- Teorema
  Para todo $v \in MC^N$ *se tiene que* $C(v) \subseteq DC(v)$.

- Teorema
  Para todo $v \in MC^N$ *con* $C(v) \neq \varnothing$ *se tiene que* $C(v) = DC(v)$.

- Teorema
  Para todo $v \in MC^N$ *se tiene que* $C(v)$ *y* $DC(v)$ *son convexos.*

Conjuntos estables

- **Definición**
  Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

  (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y.
  (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y.

- **Teorema**
  Se cumple que

  (a) *Todo conjunto estable contiene al d-núcleo.*
  (b) *Si el d-núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

- Definición
  Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

  (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y.
  (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y.

-

Teorema
Se cumple que

(a) *Todo conjunto estable contiene al d-núcleo.*
(b) *Si el d-núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

- Definición
  Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

  (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y.
  (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y.

-

  Teorema
  Se cumple que

  (a) *Todo conjunto estable contiene al d-núcleo.*
  (b) *Si el d-núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

- Definición
  Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

  (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y.
  (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y.

- Teorema
  Se cumple que

  (a) *Todo conjunto estable contiene al d-núcleo.*
  (b) *Si el d-núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

- Definición
  Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

  (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y.
  (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y.

- Teorema
  Se cumple que

  (a) *Todo conjunto estable contiene al d-núcleo.*
  (b) *Si el d-núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

- Definición
  Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si
  (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y.
  (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y.
- Teorema
  Se cumple que
  (a) *Todo conjunto estable contiene al d-núcleo.*
  (b) *Si el d-núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

- Definición
  Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

  (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y.
  (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y.

- Teorema
  Se cumple que

  (a) *Todo conjunto estable contiene al d-núcleo.*
  (b) *Si el d-núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

- Definición
  Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

  (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y.
  (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y.

- Teorema
  Se cumple que

  (a) *Todo conjunto estable contiene al d-núcleo.*
  (b) *Si el d-núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Hsiao y Raghavan(1990)

- $$m_i = m_j$$

-

Axioma

Dados $(w(0), \ldots, w(m))$, si v es de la forma

$$v(y) = \begin{cases} c & \text{si } y \geq x \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

entonces $\phi_{i,x_i}(v)$ es proporcional a $w(x_i)$.

Hsiao y Raghavan(1990)

-

$$m_i = m_j$$

-

Axioma

Dados $(w(0), \ldots, w(m))$, si v es de la forma

$$v(y) = \begin{cases} c & si\ y \geq x \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

entonces $\phi_{i,x_i}(v)$ es proporcional a $w(x_i)$.

Hsiao y Raghavan(1990)

- $$m_i = m_j$$

- Axioma
  Dados $(w(0), \ldots, w(m))$, *si* v *es de la forma*

$$v(y) = \begin{cases} c & \text{si } y \geq x \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

entonces $\phi_{i,x_i}(v)$ *es proporcional a* $w(x_i)$.

Hsiao y Raghavan(1990)

- **Definición**
  El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.

- **Axioma**
  Si x^* es portador de v entonces $\sum \phi_{i,x_i}(v) = v(m)$.

- **Axioma**
  Aditividad

- **Axioma**
  Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\geq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

- Definición
  El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.
- Axioma
  Si x^* es portador de v entonces $\sum \phi_{i,x_i}(v) = v(m)$.
- Axioma
  Aditividad
- Axioma
  Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\geq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

- Definición
  El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.
  - Axioma
    Si x^* es portador de v entonces $\sum \phi_{i,x_i}(v) = v(m)$.
    - Axioma
      Aditividad
      - Axioma
        Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\geq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

- Definición
  El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.

- Axioma
  Si x^* es portador de v entonces $\sum \phi_{i,x_i}(v) = v(m)$.

    - Axioma
      Aditividad

    - Axioma
      Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\geq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

- Definición
  El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.
- Axioma
  Si x^* *es portador de* v *entonces* $\sum \phi_{i,x_i}(v) = v(m)$.
  -

Axioma
Aditividad

-

Axioma
Dado $x^0 \in M$*, sea* $v(x) = 0$ *siempre que* $x \not\geq x^0$*, entonces* $\phi_{i,k}(v) = 0$ *para todo* $k < x_i^0$*, y todo* $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

- Definición
  El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.

- Axioma
  Si x^* es portador de v entonces $\sum \phi_{i,x_i}(v) = v(m)$.

- Axioma
  Aditividad

  - Axioma
    Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\geq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

- Definición
  El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.

- Axioma
  Si x^* es portador de v entonces $\sum \phi_{i,x_i}(v) = v(m)$.

- Axioma
  Aditividad

  -

  Axioma
  Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\geq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

- Definición
  El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.
- Axioma
  Si x^* es portador de v entonces $\sum \phi_{i,x_i}(v) = v(m)$.
- Axioma
  Aditividad
- Axioma
  Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\geq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

Teorema

Existe una única ϕ que satisface los cuatro axiomas anteriores. Además,

$$\phi_{j,i}(v) = \sum_{k=1}^{i} \sum_{x_j=k, x\neq 0, x\in M} \left[\sum_{T\subseteq M_j(x)} (-1)^t \frac{w(x_j)}{\sum_{r=1}^{n} w(x_r) + \sum_{r\in T} [w(x_r+1) - w(x_r$$

$$\times(v(x) - v(x-e^j)).$$

Derks y Peters (1993)

- Definición
  Juegos de mínimo esfuerzo,

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \geq s_i \text{ para toda } i \in N \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

- $$v = \sum_{s \in M} \delta_s u_s$$

- $$\delta_s = v(s) - \sum_{t \leq s, t \neq s} \delta_s$$

- $$\Theta_{ij}(v) = \sum_{s \in M, s_i \geq j} \frac{\delta_s}{\sum_{k \in N} s_k}$$

Derks y Peters (1993)

- Definición
  Juegos de mínimo esfuerzo,

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \geq s_i \text{ para toda } i \in N \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

- $$v = \sum_{s \in M} \delta_s u_s$$
- $$\delta_s = v(s) - \sum_{t \leq s, t \neq s} \delta_s$$
- $$\Theta_{ij}(v) = \sum_{s \in M, s_i \geq j} \frac{\delta_s}{\sum_{k \in N} s_k}$$

Derks y Peters (1993)

- Definición
  Juegos de mínimo esfuerzo,

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \geq s_i \text{ para toda } i \in N \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

  - $$v = \sum_{s \in M} \delta_s u_s$$
  - $$\delta_s = v(s) - \sum_{t \leq s, t \neq s} \delta_s$$
  - $$\Theta_{ij}(v) = \sum_{s \in M, s_i \geq j} \frac{\delta_s}{\sum_{k \in N} s_k}$$

Derks y Peters (1993)

- Definición
  Juegos de mínimo esfuerzo,

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \geq s_i \text{ para toda } i \in N \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

  - $$v = \sum_{s \in M} \delta_s u_s$$
  - $$\delta_s = v(s) - \sum_{t \leq s, t \neq s} \delta_s$$
  - $$\Theta_{ij}(v) = \sum_{s \in M, s_i \geq j} \frac{\delta_s}{\sum_{k \in N} s_k}$$

Derks y Peters (1993)

- Definición
  Juegos de mínimo esfuerzo,

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \geq s_i \text{ para toda } i \in N \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

  - $$v = \sum_{s \in M} \delta_s u_s$$
  - $$\delta_s = v(s) - \sum_{t \leq s, t \neq s} \delta_s$$
  - $$\Theta_{ij}(v) = \sum_{s \in M, s_i \geq j} \frac{\delta_s}{\sum_{k \in N} s_k}$$

van den Nouweland (1993)

- Axioma
  Eficiencia
  $\sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(v) = v(m)$

  Axioma
  Monotonía fuerte
  Para todo $v, w \in MC$ *tales que* $v(s) - v(t) \geq w(s) - w(t)$ *con* $s_i = j$, $t_i = j - 1$ *y* $t_k = s_k$ *para* $k \neq i$, *se tiene que*

$$\varphi_{ij}(v) \geq \varphi_{ij}(w).$$

van den Nouweland (1993)

- Axioma
  Eficiencia
  $\sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(v) = v(m)$

  Axioma
  Monotonía fuerte
  Para todo v, $w \in MC$ tales que $v(s) - v(t) \geq w(s) - w(t)$ con $s_i = j$, $t_i = j - 1$ y $t_k = s_k$ para $k \neq i$, se tiene que

$$\varphi_{ij}(v) \geq \varphi_{ij}(w).$$

van den Nouweland (1993)

- Axioma
  Eficiencia
  $\sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{m_i}\varphi_{ij}(v)=v(m)$

  Axioma
  Monotonía fuerte
  Para todo v*,* $w\in MC$ *tales que* $v(s)-v(t)\geq w(s)-w(t)$ *con* $s_i=j$*,* $t_i=j-1$ *y* $t_k=s_k$ *para* $k\neq i$*, se tiene que*

$$\varphi_{ij}(v)\geq\varphi_{ij}(w).$$

van den Nouweland (1993)

- Definición

  $j \in M_i^+$ es un nivel vetador si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i \leq j$.

- Axioma

  Nivel vetador

  $$\varphi_{i_1 j_1}(v) = \varphi_{i_2 j_2}(v)$$

  para todo par de niveles vetador $j_1 \in M_{i_1}^+$ y $j_2 \in M_{i_2}^+$.

- Teorema

  Una solución φ satisface eficiencia, monotonía fuerte y nivel vetador si y sólo si $\varphi = \Theta$.

van den Nouweland (1993)

- Definición
  $j \in M_i^+$ es un nivel vetador si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i \leq j$.
  -

Axioma
Nivel vetador

$$\varphi_{i_1 j_1}(v) = \varphi_{i_2 j_2}(v)$$

para todo par de niveles vetador $j_1 \in M_{i_1}^+$ y $j_2 \in M_{i_2}^+$.

  -

Teorema
Una solución φ satisface eficiencia, monotonía fuerte y nivel vetador si y sólo si $\varphi = \Theta$.

van den Nouweland (1993)

- Definición
  $j \in M_i^+$ es un nivel vetador si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i \leq j$.
  - Axioma
    Nivel vetador
    $$\varphi_{i_1 j_1}(v) = \varphi_{i_2 j_2}(v)$$
    para todo par de niveles vetador $j_1 \in M_{i_1}^+$ y $j_2 \in M_{i_2}^+$.
  - Teorema
    Una solución φ satisface eficiencia, monotonía fuerte y nivel vetador si y sólo si $\varphi = \Theta$.

van den Nouweland (1993)

- Definición
  $j \in M_i^+$ es un nivel vetador si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i \leq j$.

- Axioma
  Nivel vetador

$$\varphi_{i_1 j_1}(v) = \varphi_{i_2 j_2}(v)$$

  para todo par de niveles vetador $j_1 \in M_{i_1}^+$ *y* $j_2 \in M_{i_2}^+$.

  - Teorema
    Una solución φ satisface eficiencia, monotonía fuerte y nivel vetador si y sólo si $\varphi = \Theta$.

van den Nouweland (1993)

- Definición
  $j \in M_i^+$ es un nivel vetador si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i \leq j$.

- Axioma
  Nivel vetador

$$\varphi_{i_1 j_1}(v) = \varphi_{i_2 j_2}(v)$$

  para todo par de niveles vetador $j_1 \in M_{i_1}^+$ *y* $j_2 \in M_{i_2}^+$.

  -

Teorema
Una solución φ satisface eficiencia, monotonía fuerte y nivel vetador si y sólo si $\varphi = \Theta$.

van den Nouweland (1993)

- Definición
  $j \in M_i^+$ es un nivel vetador si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i \leq j$.
- Axioma
  Nivel vetador
  $$\varphi_{i_1 j_1}(v) = \varphi_{i_2 j_2}(v)$$
  para todo par de niveles vetador $j_1 \in M_{i_1}^+$ *y* $j_2 \in M_{i_2}^+$.
- Teorema
  Una solución φ *satisface eficiencia, monotonía fuerte y nivel vetador si y sólo si* $\varphi = \Theta$.

Klijn, Slikker y Zarzuelo (1999)

-

Definición
$j \in M_i^+$ es un nivel nulo si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i < j$.

-

Teorema
Una solución φ satisface eficiencia, aditividad, nivel vetador y nulidad si y sólo si $\varphi = \Theta$.

Klijn, Slikker y Zarzuelo (1999)

- Definición
  $j \in M_i^+$ es un nivel nulo si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i < j$.
    -

  Teorema
  Una solución φ satisface eficiencia, aditividad, nivel vetador y nulidad si y sólo si $\varphi = \Theta$.

Klijn, Slikker y Zarzuelo (1999)

- Definición
  $j \in M_i^+$ es un nivel nulo si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i < j$.
  -

  Teorema
  Una solución φ satisface eficiencia, aditividad, nivel vetador y nulidad si y sólo si $\varphi = \Theta$.

Klijn, Slikker y Zarzuelo (1999)

- Definición
  $j \in M_i^+$ es un nivel nulo si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i < j$.
- Teorema
  Una solución φ satisface eficiencia, aditividad, nivel vetador y nulidad si y sólo si $\varphi = \Theta$.

Referencias

Branzei R., Dimitrov D. y Tijs S. (2005). *Models in Cooperative Game Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Hsiao C. R. y RaghavanT.E. (1990). Shapley value for Multi-Choice Cooperative Games, *Journal of Game Theory and Economic Behavior*.

Hsiao C. R. y RaghavanT.E. (1992) Monotonicity and dummy free property for multi-choice cooperative games, *International Journal of Game Theory* 21:301-312.

Klijn F., Slikker M. y Zarzuelo J. (1999). Characterizations of a multi-choice value, *International Journal of Game Theory* 28, pp.521-532.

Nouweland A van den (1993) Games and graphs in economic situations. *PhD Dissertation*, Tilburg University, Tilburg, The Netherlands.

Peters H. (2008). *Game Theory. A Multi-Leveled Approach*